SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA

DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

P. PLAZZI

L'EQUAZIONE DEGENERE NON LINEARE

$$D_t(Mu(t)) + Lu(t) = f(t,Ku(t))$$

BOLOGNA, 30 MAGGIO 1985

1. INTRODUZIONE

Questa conferenza si riallaccia strettamente a quella tenuta da A. Favini per questo medesimo ciclo di seminari il 28/11/84 ([4]): in effetti, i risultati discussi nel presente Seminario, relativi all'equazione astratta

$$\frac{d}{dt}(Mu(t)) + Lu(t) = f(t,Ku(t)) \tag{1}$$

sono un approfondimento ed una estensione di quelli già esposti, tratti dal lavoro in collaborazione [1], relativo all'equazione

$$BTu = f(u) \tag{2}$$

in cui le ipotesi su B, T, f erano state scelte in modo da rendere (1) un caso particolare di (2) (in particolare, B veniva sempre supposto invertibile con continuità).

Uno dei motivi dell'interesse delle equazioni astratte risiede nella possibilità di *algebrizzare* in parte un'equazione differenziale: se si riscrive (per fare un esempio elementare) l'equazione del calore

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u$$

in forma di equazione astratta (di evoluzione)

$$u' = Tu \quad (T = \Delta)$$

si spostano i problemi relativi allo studio di un operatore differenziale nel quadro delle proprietà di invertibilità (e quindi, più in generale, spettrali) di certi operatori lineari tra spazi funzionali; ciò è ancora più sensibile nella trattazione di equazioni degeneri ed ha motivato, per lo studio di una equazione del tipo

$$(2') \qquad \frac{d}{dt} Tu(t) = f(t,u(t))$$

una ulteriore 'algebrizzazione' che ha portato allo studio della generalizzazione (2) di (2'), ove B è un operatore lineare chiuso che nei casi tipici rappresenta una derivazione, ed il secondo membro di (2') è interpretato come un operatore di Nemytskij agente su u, intesa come funzione a valori vettoriali.

Come è prevedibile, ad assicurare l'esistenza di soluzioni per la (2) sono essenziali ipotesi di tipo spettrale su T: in particolare, la tecnica usata in [1] richiedeva la scomposizione dello spazio ambiente E di T in

$$(3) \qquad E = \mathcal{N}(T^m) \oplus \mathcal{R}(T^m)$$

per un $m \in \mathbb{N}$ ($\mathcal{N}$ = nucleo, $\mathcal{R}$ = codominio): è noto([3]) che una ipotesi che assicura la decomposizione (3) è che il risolvente $\lambda \to (\lambda I - T)^{-1}$ abbia una singolarità polare per $\lambda = 0$, sicché in [1] questa ipotesi su (2) veniva costantemente mantenuta (oltre naturalmente ad altre su B ed f).

Come specializzazione dei risultati di esistenza su (2) veniva ottenuto un analogo risultato per l'equazione 'semilineare'

$$(1') \qquad BMu = -Lu + g(u)$$

(L, $M \subseteq F \to E$ sono operatori lineari chiusi densamente definiti tra i Banach F ed E, g: $\mathcal{D}(L) \to E$ è continua).

Precisamente, si può ottenere ([1, theorem 3]):

Teorema A. *Data l'equazione (1') nelle ipotesi dette, se, di più,* $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{D}(M)$ ($\mathcal{D}$ = dominio), *L è invertibile, e, posto* $T = ML^{-1}$, *si ha un polo semplice in* $\lambda = 0$ *per* $\lambda \to (T-\lambda I)^{-1}$, *allora (1') ha soluzione sotto le ulteriori condizioni*

la norma $\| B^{-1}; L(E) \|$ *può essere supposta piccola a sufficienza;* (H)

$(B-\lambda I)^{-1}$, $(T + \mu I)^{-1}$ *commutano per ogni* λ, μ *per cui esistono;* (K)

g *soddisfa una condizione di Lipschitz*
$\| g(u) - g(v); E \| \leq M \| u-v; \mathcal{D}(L) \| \ \forall u, v \in \mathcal{D}(L)$ (J)
($\mathcal{D}(L)$ ha la norma del grafico)
con $M > 0$ *sufficientemente piccolo.*

Le ipotesi (H) e (K) sono supposte valere costantemente in [1] (in particolare, B è invertibile con continuità) e l'ipotesi (J) sulla piccolezza della costante di Lipschitz M per g si riflette nell'esistenza di soluzioni nel caso di 'piccole perturbazioni' della equazione lineare $BMu = -Lu$; in effetti si può applicare il teorema A al problema

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt} Mu(t) = -Lu(t) + \varepsilon g(t,u(t)) \quad 0 < t \leq \tau \\ (I-P)u(t) \to 0 \text{ per } t \to 0+ \ (P = \text{proiezione su } N(ML^{-1})) \end{cases}$$

dove u è soluzione del problema in senso astratto, ed appartiene a $L^p([0,\tau]; X)$ ($p > 1$; X spazio di Banach), ottenendo esistenza di soluzioni per $|\varepsilon|$ piccolo: il fatto che la soluzione esista poi solo per piccoli $\tau > 0$ dipende invece essenzialmente da (H) (per maggiori dettagli, cfr. [1, example 1]).

Si sarà notato che nel teorema A si è fatta l'ipotesi di un polo *semplice* nell'origine per il risolvente di $T = ML^{-1}$: in effetti, coi metodi di [1] non è possibile ottenere altrimenti risultati migliori rispetto al caso generale (2); questo fatto - e l'interesse presentato da problemi in cui il risolvente di T non ha necessariamente singolarità polari nell'origine - motivano uno studio particolareggiato di (1) con tecniche più aderenti alla natura 'semilineare' dell'equazione.

2. L'EQUAZIONE $D_t Mu(t) + Lu(t) = f(t, Ku(t))$.

2.1. In [2] si studia dunque il problema

$$(P) \quad \begin{cases} D_t Mu(t) + Lu(t) = f(t,Ku(t)) & 0 < t \leq \tau \\ Mu(t) \longrightarrow u_0 \quad \text{per} \quad t \to 0+ \end{cases}$$

con K,L,M operatori lineari chiusi da Y a X, due spazi di Banach (L è sempre supposto invertibile con dominio $\mathcal{D}(L) \subseteq \mathcal{D}(M) \cap \mathcal{D}(K)$; $f: [0,\tau] \times X \to X$ è continua).

La soluzione cercata u non è 'astratta': è una soluzione 'clas

sica' nel senso che u: $[0,\tau] \to Y$ deve soddisfare (P) e inoltre

i) $u(t) \in \mathcal{D}(L)$ $\forall t \in]0,\tau]$,

ii) $t \to Lu(t)$ è X-continua su $[0,\tau]$;

iii) $t \to Mu(t)$ è fortemente differenziabile su $]0,\tau]$;

per essere detta soluzione di (P).

2.2. Studiando direttamente (P) si possono ottenere risultati di esistenza sotto ipotesi meno restrittive (su f, ad esempio) di quelle del teorema A già nel caso stesso in cui l'origine è un polo semplice di $z \to L(zM + L)^{-1}$ (ipotesi che, data l'invertibilità di L, coincide con l'ipotesi del polo semplice per il risolvente di $T = ML^{-1}$, che compare nel teorema A): in effetti, l'ipotesi (J) può in particolare venir rimpiazzata da ipotesi 'locali'.

Precisamente si ha ([2, theorem 1.1])

Teorema B. *Si consideri* (P) *nelle ipotesi dette: in particolare* $z = 0$ *sia un polo semplice per* $z \to (T-zI)^{-1}$, $T = ML^{-1}$. (P) *ha una soluzione classica con* $\tau > 0$ *sufficientemente piccolo, se* f *soddisfa le seguenti condizioni:*

(H1) *vi sono una funzione limitata positiva di* $t \in]0,\tau]$, *sia* $t \to a(t)$, *ed una funzione positiva non decrescente di* $r, s \in [0,+\infty[$, *sia* $(r,s) \to C_1(r,s)$, *tali che*
$$\|f(t,u_1) - f(t,u_2); X\| \le a(t)C_1(\|u_1;X\|, \|u_2; X\|) \cdot \|u_1-u_2;X\|;$$

(H2) *vi sono una funzione positiva limitata di* $t \in]0,\tau]$, *sia* $t \to b(t)$, *una funzione positiva non decrescente di* $s \in [0,+\infty[$, *sia* $s \to C_2(s)$, *tali che*
$\|f(t,u); X\| \leq b(t)\, C_2(\|u, X\|) \cdot \|u; X\|$;

(H3) $\lim\limits_{t\to 0} a(t) = \lim\limits_{t\to 0} b(t) = 0$;

questa soluzione esiste qualunque sia il dato iniziale $u_0 \in R(T)$.

■ Diamo una traccia della dimostrazione. Posto $N = KL^{-1}$, $Lu = v$ (P) si trasforma in (P_1):

$$(P_1) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} Tv(t) + v(t) = f(t, Nv(t)) \quad t \in]0,\tau] \\ Tv(t) \underset{t\to o+}{\longrightarrow} w_0 \end{cases}$$

siccome la decomposizione $X = N(T) \oplus R(T)$ vale ([3]), dette P la proiezione indotta su $N(T)$, $\tilde{T}$ la restrizione di T a $R(T)$, (P_1) a sua volta si decompone nel problema differenziale (P_2) e nell'equazione 'algebrica' (P_3):

$$(P_2) \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt} \tilde{T}(I-P)v(t) + (I-P)v(t) = \\ \qquad\qquad = (I-P)f(t, NPv(t) + N(I-P)v(t)), \ t \in]0,\tau] \\ \lim\limits_{t\to o+} (I-P)v(t) = v_0 \end{cases}$$

con $w_0 = \tilde{T}v_0$, $v_0 \in R(T) = R(\tilde{T})$, e

(P_3) $\qquad 0 = -Pv(t) + Pf(t,NPv(t) + N(I-P)v(t)), \quad t \in]0,\tau].$

Ora, in (P_2), $\tilde{T}$ è invertibile, sicché esso si trasforma in una equazione di Volterra nell'incognita $w = (I-P)v$:

$$w(t) = v_0 - \int_0^t \tilde{T}^{-1} w(s)\, ds + \int_0^t \tilde{T}^{-1}(I-P)f(s,NPv(s)+Nw(s))ds, \; 0<t\leq\tau,$$

in dipendenza da un parametro Pv. Le ipotesi fatte permettono di applicare il principio del punto fisso per contrazioni, ottenendo una soluzione $w = u(Pv)$, che dipende in modo lipschitziano da Pv: una nuova applicazione del principio di punto fisso in (P_3) permette ora di concludere. ■

2.3. Il teorema B è un'estensione del teorema A, ed esso può venir applicato in molti casi; certamente ad alcuni sistemi di equazioni ordinarie, cioè quando, essenzialmente, L ed M si riducono a matrici: ma in questi casi si potrebbero usare, unitamente al principio di punto fisso, proprietà dell'inversa di Drazin - cfr. [5] - ottenendo risultati più generali di quelli esposti qui, che sono significativi per equazioni intrinsicamente astratte (cioè in spazi di dimensione infinita): un caso genuinamente nuovo è quello in cui si abbiano operatori di tipo Fredholm (ad esempio, se M è definito da un opportuno operatore differenziale); tuttavia applicazioni di tipo molto semplice possono non ricadere più sotto le ipotesi di B: un caso del genere è rappresentato da un operatore M di moltiplicazione per una funzione $x \to m(x)$ non negativa, con $-L$ fortemente ellittico. Per ottenere risultati di esistenza per (P) in situazioni di questo genere, si può rimpiazzare l'invertibilità di $z-ML^{-1} = z-T$ vicino all'origine, con una delle seguenti ipotesi:

(I) $sM + L$ ha inversa (limitata) $\forall s \geq 0$ e
$\|L(sM + L)^{-1}; \mathcal{L}(X)\| \leq 1 \quad \forall s \geq 0$
(caso della contrazione);

(II) $(sM + L)^{-1}$ esiste $\forall s \in C$ con $\mathcal{R}e\, s \geq 0$ e
$\|L(sM + L)^{-1}; \mathcal{L}(X)\| \leq$ cost. in questo
semipiano (caso analitico).

Infatti, se X è riflessivo, nei casi (I) o (II) vale una versione più debole di (3) (con m = 1), precisamente

$$X = \mathcal{N}(T) \oplus \overline{\mathcal{R}(T)} \qquad (3')$$

e la restrizione $\tilde{T}$ di T a $\overline{\mathcal{R}(T)}$ è un operatore potenziale astratto, nel senso che $-\tilde{T}^{-1}$ genera un semigruppo di contrazioni (caso (I)) o un semigruppo analitico (caso (II)): con la scomposizione (3'), i metodi precedenti ed i risultati ottenuti in [6] da A. Favini si può trattare la equazione (1) prescindendo dall'ipotesi della singolarità polare nella origine per il risolvente di ML^{-1}.

Si ha come risultato ([2, theorem 2.2]):

Teorema C. *Sia X riflessivo e si consideri (P) sotto una delle ipotesi (I) o (II); $g \in C([0,\tau] \times \mathcal{D}(L), \mathcal{D}(L))$ soddisfi*

$$\|g(t, x_1) - g(t, x_2); \mathcal{D}(L)\| \leq C(\|x_1;\mathcal{D}(L)\|, \|x_2; \mathcal{D}(L)\|)\cdot \|x_1-x_2; \mathcal{D}(L)\| \quad \forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}(L) \quad \forall t \in [0,\tau] \qquad (H4)$$

con C positiva e non decrescente in entrambi i suoi argomenti, e sia $f = Mg$; *quanto a K, sia limitata come applicazione* $\mathcal{D}(L) \to \mathcal{D}(L)$.

Allora, dato $w_0 \in M(\mathcal{D}(L))$ *come dato iniziale in* (P) *si ha soluzione classica definita su un intervallo* $[0,\tilde{\tau}]$ *con* $\tilde{\tau} \leq \tau$ *dipendente eventualmente da* w_0.

Queste ipotesi, come si vedrà nelle applicazioni, sono soddisfatte in casi in cui M è una moltiplicazione (per una funzione delle x) a cui non è applicabile il teorema B.

3. APPLICAZIONI

3.1. Anzitutto, il problema che ha motivato le tecniche di potenziale astratto di 2.3 è il seguente:

$$
\text{(P1)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial t}(m(x)u(t,x)) = -A(x,D_x)u(t,x) + f(t,x,u(x,t), \mathrm{grad}_x u(x,t)) \\ \qquad\qquad 0 < t \leqq \tau, \quad x \in \Omega \\ u(t,x) = 0 \quad \text{per} \quad x \in \partial\Omega, \ 0 \leqq t \leqq \tau \\ \lim\limits_{t \to 0} m(x)u(t,x) = w_0(x), \quad x \in \Omega \end{cases}
$$

dove: Ω è un aperto limitato e connesso con frontiera regolare $\partial\Omega$;
$A(x,D_x) = \sum\limits_{|\alpha| \leqq 2} a_\alpha(x)\, D_x^\alpha$ è un operatore differenziale fortemente ellittico in Ω;
$x \to m(x)$ è una funzione continua su $\bar{\Omega}$, non negativa e > 0 su Ω (m può annullarsi solo su $\partial\Omega$);
f è una funzione di $(t,x,u,v) \in [0,\tau] \times \Omega \times R^{n+1}$.

Cominciamo col tradurre (P1) in termini astratti. Allora ad $A(x,D_x)$ è associato l'operatore A in $L^p(\Omega)$, $p \geqq 2$ dato da

$$\begin{cases} \mathcal{D}(A) = W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega) \\ Au = A(x,D_x)u \ , \quad u \in \mathcal{D}(A): \end{cases}$$

A è il generatore infinitesimale di un semigruppo analitico ([8, p. 214]).

Per realizzare convenientemente l'operatore M introduciamo lo spazio pesato $V = L^p(m^{1/p}, \Omega)$, con duale $V' = L^p(m^{-1/p'}, \Omega)$ e norma $u \to (\int_\Omega m|u|^p)^{1/p}$ (rispettivamente, $(\int_\Omega m^{1-p}|u|^p)^{1/p}$).

Se allora L è definito da

$$\begin{cases} \mathcal{D}(L) = \{u \in \mathcal{D}(A);\ Au \in V'\} \\ Lu = Au \quad \text{se} \quad u \in \mathcal{D}(L) \end{cases}$$

e M è la realizzazione in V della moltiplicazione,

$$\begin{cases} \mathcal{D}(M) = V \\ (Mu)(x) = m(x)u(x) \quad \forall x \in \Omega \text{ se } u \in V \end{cases}$$

si ha([6])che $zM + L$ ha inverso (limitato) $\forall z$ con $\mathcal{Re}\, z \geq 0$ e

$$\|(zM + L)^{-1};\ \mathcal{L}(V',V)\| \leq C(1+|z|)^{-1} \quad \text{se} \quad \mathcal{Re}\, z \geq 0 :$$

ne segue direttamente che le prime condizioni nel teorema C sono soddisfatte ($X = V'$).

Per realizzare l'operatore non lineare a secondo membro, consideriamo anzitutto una funzione $g = g(t,x,u,v)$ che sia $C^{(1)}$ nelle sue variabili $(t,x,u,v) \in [0,\tau] \times \Omega \times R_u \times R_v^n$: l'operatore di tipo Nemytskij G dato da

$$G(t,u)(x) = g(t,x,u, \mathrm{grad}_x u)$$

soddisfa([7])

$$\| G(t,u_1)-G(t,u_2);\ L^p(\Omega)\| \leq \mathrm{Cost}\ \| A\ u_1-A\ u_2;\ L^p(\Omega)\|$$

se u_1, $u_2 \in \mathcal{D}(A)$,

dove C dipende dalle norme $\|D^j\ u_i;\ L^\infty(\Omega)\|$ $(j = 0,1;\ i = 1,2)$, e $p >> 1$; definito $G_1 = m^{1/p'}\ G$, si vede che è possibile applicare il teorema C a $f = m\ A^{-1}\ G_1$ (o, meglio, alla sua realizzazione astratta).

A questa versione astratta dell'equazione si applica più precisamente il teorema C, dando un risultato di esistenza parimenti relativo a quest'ultima (le condizioni iniziali ed al contorno sono tradotte in maniera standard: la condizione omogenea su $\partial\Omega$ porta alla scelta di u in un W_0; il limite per $t \to 0$ è nel senso della topologia L^p).

Per rientrare nel quadro delineato nel teorema C, il dato w_0 dovrà essere del tipo $w_0 = m \cdot u_0$ con $u_0 \in W^{2,p}(\Omega) \cap W_0^{1,p}(\Omega)$, $A(x,D_x)u_0 \in L^p(m^{-1/p'},\Omega)$ dove $p >> 1$.

3.2. Come esempio di applicazione del teorema B, consideriamo (una versione astratta del) problema

$$
(P2)\quad \begin{cases}
\dfrac{\partial}{\partial t}(I + \dfrac{\partial^2}{\partial x^2})u(x,t) = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + \varepsilon f(t,x,u,\dfrac{\partial u}{\partial x},\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}) \\
\qquad\qquad (t \in]0,\tau],\ x \in]0,\pi[) \\
\lim_{t\to o} (1+\dfrac{\partial^2}{\partial x^2})\, u(t,x) = w_0(x)\ , \quad x \in]0,\pi[\\
u(t,o) = u(t,\pi),\quad t \in]0,\tau\,].
\end{cases}
$$

Qui M è tipicamente realizzato da un operatore differenziale nella variabile di spazio:

$$
\begin{cases}
\mathcal{D}(M) = H^2(o,\pi) \cap H^1_0(0,\pi) \subseteq L^2(0,\pi) \\
M\phi \doteq \phi + \phi''
\end{cases}
$$

$z \to (z + M)^{-1}$ ha un polo semplice per $z = 0$, e L realizzato da

$$
\begin{cases}
\mathcal{D}(L) = H^2(0,\pi) \cap H^1_0(0,\pi) = \mathcal{D}(M) \\
L\phi = -\phi''
\end{cases}
$$

commuta con M, sicché ([6]) è possibile ottenere una stima del tipo richiesto per $L(zM + L)^{-1}$.

Rimane da assegnare f: se si largheggia nelle ipotesi, richiedendo che f sia $C^{(1)}$ nei suoi argomenti, si può ottenere in corrispondenza un operatore di sostituzione che almeno per $|\varepsilon| \ll 1$ soddisfi le richieste del teorema B: se quindi il dato w_0 è del tipo

$$
w_0 = u_0 + u''_0
$$

con $u_0 \in H^2(0,\pi) \cap H_0^1(0,\pi)$, si può assicurare l'esistenza di una soluzione per la versione astratta del problema (iniziale/ai limiti) considerato.

BIBLIOGRAFIA

[1] FAVINI, A. e PLAZZI, P., "Existence of Solutions for the Abstract Nonlinear Equation BTu = f(u)", in corso di stampa su Nonlinear Anal..

[2] FAVINI, A. e PLAZZI, P., "Some Results Concerning the Abstract Degenerate Nonlinear Equation $D_t Mu(t) + Lu(t) = f(t,Ku(t))$", in corso di stampa su Circuits, Systems and Signal Processing.

[3] YOSIDA, K., Functional Analysis, Springer 1968.

[4] FAVINI, A., "Su una equazione astratta non lineare e degenere", Seminario di Analisi Matematica-Dipartimento di Matematica dell'Università di Bologna, conferenza del 29/11/1984.

[5] CAMPBELL, S.L. e MEYER, C.D., Generalized Inverses of Linear Transformations, Pitman 1979.

[6] FAVINI, A., "Abstract Potential Operators and Spectral Methods for a Class of Degenerate Evolution Equations", J. Differential Equations 39 (1981), 212-225.

[7] PAZY, A., Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations, Springer 1983.